इकाई-3

नियामक ज्यामिति

3.1 कार्तीय नियामक एवं निर्देशांक

भूमिका

पिछली कक्षा में हमने किसी तल में स्थित बिन्दुओं की स्थिति का निर्धारण करना सीखा है। तल में स्थित किसी बिन्दु के स्थान का निर्धारण करने के लिए हमें दो दूरियों का पता लगाना पड़ता है। पहली, तल पर खींची गयी क्षैतिज रेखा से उस बिन्दु की लम्बवत् दूरी तो दूसरी उस क्षैतिज रेखा के लम्बवत् खींची गयी रेखा से उस बिन्दु की लम्बवत् दूरी। दोनों दूरियों को एक युग्म के रूप में प्रकट करते हैं। तल के क्षैतिज रेखा X-अक्ष तथा उस पर खींची गयी लम्बवत् रेखा Y-अक्ष कहलाती है। दोनों अक्षों के कटान बिन्दु को मूल बिन्दु "O" कहते हैं। तल में स्थित बिन्दु, X-अक्ष से जितनी लम्बवत् दूरी पर होता है वह उस बिन्दु का Y-निर्देशांक तथा Y-अक्ष से उसकी लम्बवत् दूरी को X-निर्देशांक कहा जाता हैं। मूल बन्दु "O" का निर्देशांक (0,0) होता है।

तल में स्थित किसी बिन्दु के स्थान को निर्धारित करने के इस तरीके की खोज फ्रांसीसी गणितज्ञ रेने दकार्ते ने की थी। ऐसा कहा जाता है कि दकार्ते को सुबह में देर तक बिस्तर पर लेटे रहने की आदत थी। अपनी इस आदत का उपयोग वे कोई आराम करने के लिए नहीं वरन् सोचने के लिए करते थे। एक दिन जब वे बिस्तर पर लेटकर सोच रहे थे तो ऊपर छत के कोने से आगे की तरफ एक चींटी को चलते देख उनके मन में चींटी के स्थान के निर्धारण का ख्याल आया और यही ख्याल तल में किसी बिन्दु के स्थान निर्धारण का तरीका खोज पाने में सक्षम हुआ। चूँकि तल में किसी बिन्दु के स्थान निर्धारण का तरीका दकार्ते द्वारा खोजा गया था इसलिए उनके सम्मान में इस पद्धति को ''कार्तीय पद्धति'' कहा गया।

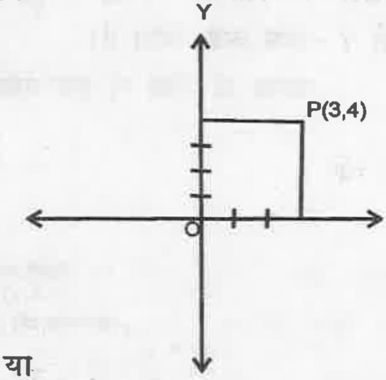
कार्तीय नियामक

किसी बिन्दु के स्थान-निर्धारण हेतु दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ (X-अक्ष एवं Y-अक्ष) ली जाती हैं। इन रेखाओं के बीच का कोण समकोण या कोई दूसरा कोण भी हो सकता है। इसी कोण की माप के आधार पर कार्तीय नियामक पद्धति को दो प्रकारों में बाँटा जाता है:

1. समकोणीय कार्तीय नियामक (Rectangular Cartesian Co-ordinates)
2. तिर्यक कार्तीय नियामक (Oblique Cartesian Co-ordinates)

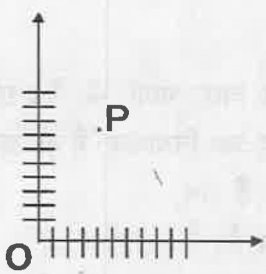
यहाँ हम केवल समकोणीय कार्तीय नियामक पद्धति पर चर्चा करेंगे।

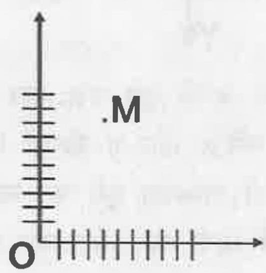
समकोणीय कार्तीय नियामक पद्धति

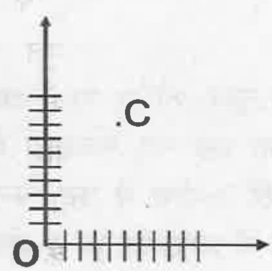


बगल के चित्र में P(3,4) बिन्दु को दर्शाया गया है जिसका X–निर्देशांक 3 तथा Y–निर्देशांक 4 है यानी बिन्दु P(3,4) X-अक्ष से 4 इकाई तथा Y–अक्ष से 3 इकाई लम्बवत् दूरी पर अवस्थित है। यहाँ (3,4) बिन्दु P का कार्तीय नियामक या निर्देशांक कहलाता है। किसी बिन्दु का कार्तीय नियामक या निर्देशांक उस बिन्दु के साथ ही कोष्ठंक में दर्शाया जाता है। इस प्रकार यदि किसी बिन्दु P की Y–अक्ष से लम्बवत् दूरी a तथा X–अक्ष से लम्बवत् दूरी b हो तब उसका कार्तीय नियामक या निर्देशांक P(a,b) होगा।

आइए, नीचे दिये गये बिन्दुओं के नियामक का पता लगायें:

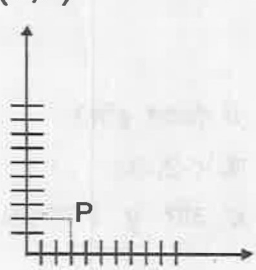




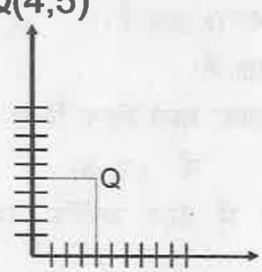


निम्न बिन्दुओं को उनके नियामक के आलोक में नीचे आलेख में प्रदर्शित करें:

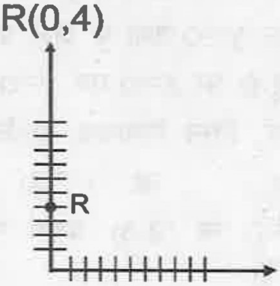
P(3,2)



Q(4,5)

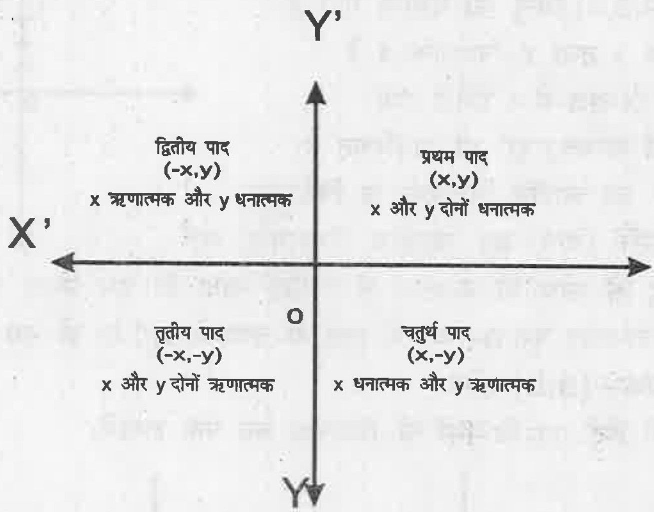


R(0,4)



किसी बिन्दु के नियामक को हम दो लम्ब रेखाओं के माध्यम से प्राप्त करते है। ये रेखाएँ एक दूसरी को मूल बिन्दु O पर काटती हैं। इन दोनों में क्षैतिज रेखा जिसे नीचे XOX' से दर्शाया गया है को X-अक्ष तथा उदग्र रेखा जिसे YOY' से दर्शाया गया है को Y -अक्ष कहा जाता है।

ऊपर के चित्र में हम देख रहे हैं कि X और Y अक्ष एक दूसरे पर लम्बवत् हैं



तथा एक दूसरे को O पर विभाजित करते हुए उस तल को चार भागों में बाँट रहे हैं। प्रत्येक भाग एक पाद कहलाता है। यदि x और y किसी बिन्दु के नियामक है जो क्रमशः Y-अक्ष एवं X-अक्ष से उस बिन्दु की लम्बवत दूरी को बताते हैं तब,

प्रथम पाद में $x>0$ और $y>0$ होता है यानी दोनों धनात्मक होता है।

द्वितीय पाद में $x<0$ और $y>0$ होता है यानी x ऋणात्मक तथा y धनात्मक होता है।

तृतीय पाद में $x<0$ तथा $y<0$ होता है यानी दोनों ऋणात्मक होता है।

चतुर्थ पाद में $x>0$ तथा $y<0$ होता है यानी x धनात्मक तथा y ऋणात्मक होता है।

x अक्ष पर $y=0$ तथा y अक्ष पर $x=0$ होता है।

मूल बिन्दु O पर $x=0$ एवं $y=0$ होता है।

आइए देखें, निम्न नियामक या निर्देशांक वाले बिन्दु किस पाद में स्थित होंगे?

क. (2,3) ख. (-2,3) ग. (2,-3) घ. (-2,-3)

हलः बिन्दु, क (2,3) प्रथम पाद में होगा क्योंकि उसके x और y नियामक दोनों धनात्मक हैं।

शेष प्रश्न खुद हल करें।

नीचे दिये गये प्रश्नों को स्वयं हल करें:

1. एक बिन्दु X-अक्ष पर स्थित है इसका y-नियामक क्या होगा?
2. एक बिन्दु के नियामक (O,O) है यह बिन्दु कहाँ स्थित होगा?
3. बिन्दु P(0,5) को आलेख में दर्शाइए।
4. बिन्दु M (-4,0) को आलेख में दर्शाइए।

3.2 दूरी-सूत्र (DISTANCE FORMULA)

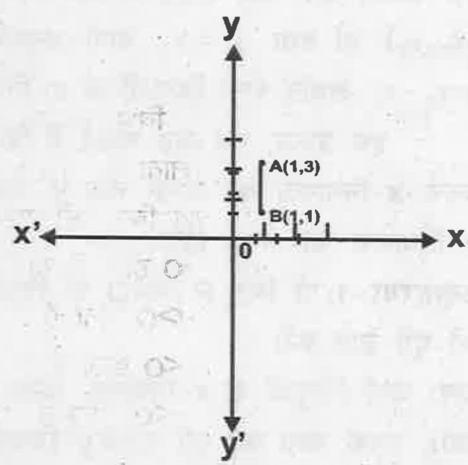
किसी तल में स्थित किसी बिन्दु की स्थिति को हम कार्तीय नियामक द्वारा व्यक्त करना जान चुके हैं। आइए, अब किसी तल में स्थित दो बिन्दुओं के बीच की दूरी को ज्ञात किया जाय। दो बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात करने में उन बिन्दुओं के नियामक या निर्देशांकों की प्रमुख भूमिका होती है। नियामकों के आधार पर उनके बीच की दूरी का निर्धारण किया जाता है। इसके लिए हम उन दोनों बिन्दुओं के नियामक से संबंधित निम्न स्थितियों पर विचार करें-

स्थिति-1: जब दोनों बिन्दुओं के X-नियामक बराबर हों।

स्थिति-2: जब दोनों बिन्दुओं के y-नियामक बराबर हों।

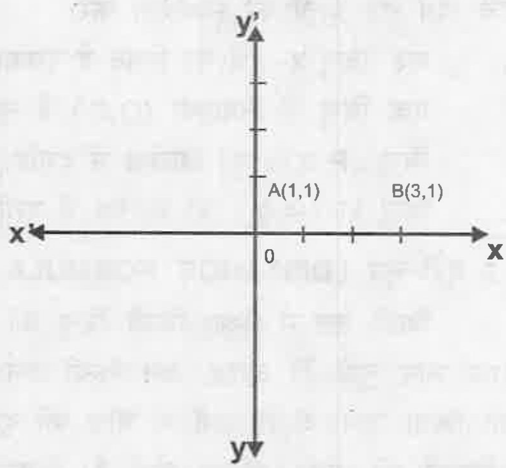
स्थिति-3: जब दोनों बिन्दुओं में से एक मूल बिन्दु पर तथा दूसरा किसी पाद में हों।

स्थिति-4: जब दोनों बिन्दुओं के X y नियामक अलग-अलग हों।



स्थिति-1: यहाँ बिन्दु A तथा बिन्दु B के X-नियामक समान हैं। इनको मिलानेवाला रेखाखंड AB, Y-अक्ष के समान्तर है। अतः रेखाखंड की लम्बाई ज्ञात करने में X-नियामक की कोई भूमिका नहीं दिखाई पड़ रही है। रेखाखंड की लम्बाई ज्ञात करने हेतु y-नियामक का अन्तर निकाल लेते हैं। अतः रेखाखंड AB की लम्बाई=3-1= 2 इकाई।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि यदि दो बिन्दुओं के नियामक क्रमशः (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) हों तथा $x_1 = x_2$ यानी उनका X-नियामक बराबर हो तो उनके बीच की दूरी $= y_2 - y_1$ अर्थात् दोनों बिन्दुओं के y नियामकों का अन्तर होगा।



स्थिति-2: यहाँ बिन्दु A तथा बिन्दु B के y-नियामक समान हैं। इनको मिलानेवाला रेखाखंड AB,X-अक्ष के समान्तर है। अत: रेखाखंड की लम्बाई ज्ञात करने में y-नियामक की कोई भूमिका नहीं दिखाई पड़ रही है।

रेखाखंड की लम्बाई ज्ञात करने हेतु X-नियामक का अन्तर निकाल लेते हैं। अत: रेखाखंड AB की लम्बाई = 3-1=2 इकाई।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि यदि दो बिन्दुओं के नियामक क्रमशः (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) हों तथा $y_1 = y_2$ यानी उनके y-नियामक बराबर हों तो उनके बीच की दूरी $= x_2 - x_1$ अर्थात् दोनों बिन्दुओं के X-नियामकों का अन्तर होगी।

इस प्रकार, हम कह सकते है कि X-अक्ष पर स्थित दो बिन्दुओं के बीच की दूरी उनके X-नियामक का अन्तर तथा y-अक्ष पर स्थित दो बिन्दुओं के बीच की दूरी उनके y-नियामक का अन्तर होगा।

उदाहरण-1: दो बिन्दु P औरQ के नियामक क्रमशः (2,4) तथा (2,6) हैं तो उनके बीच की दूरी ज्ञात करें।

हल: दोनों बिन्दुओं के X-नियामक समान हैं।

अत:, उनके बीच की दूरी उनके y-नियामकों का अन्तर होगी।

दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी = 6-4 = 2 इकाई।

उदाहरण-2: दो बिन्दु ड और छ के नियामक कमशः (4,2) तथा (1,2) हैं तो उनके बीच की दूरी ज्ञात करें।

हल: दोनों बिन्दुओं के y-नियामक समान हैं,

अत: उनके बीच की दूरी उनके X-नियामकों का अन्तर होगी।

अतः, दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी = 4-1 = 3 इकाई।

उदाहरण-3: दो बिन्दु A और B के नियामक क्रमशः (0,2) तथा (0,6) हैं तो उनके बीच की दूरी ज्ञात करें।

हल: दोनों बिन्दुओं के X-नियामक शून्य हैं अतः दोनों बिन्दु Y-अक्ष पर स्थित हैं। इसलिए उनके बीच की दूरी उनके y-नियामकों का अन्तर होगी।

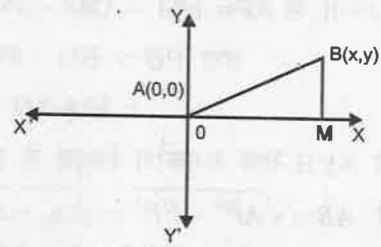
दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी =6-2=4 इकाई।

उदाहरण-4: दो बिन्दु M और N के नियामक क्रमशः (5,0) तथा (2,0) हैं तो उनके बीच की दूरी ज्ञात करें।

हल: दोनों बिन्दुओं के y-नियामक शून्य हैं अतः दोनों बिन्दु X-अक्ष पर स्थित हैं।

इसलिए उनके बीच की दूरी उनके X-नियामकों का अन्तर होगी।

अतः, दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी = 5-2 = 3 इकाई।



स्थिति-3: यहाँ बिन्दु A मूल बिन्दु पर स्थित है तथा बिन्दु B का नियामक (x,y) है। इनको मिलानेवाला रेखाखंड AB है। अतः रेखाखंड AB की लम्बाई ज्ञात करने हेतु पहले B बिन्दु से X -अक्ष पर एक लंब BM डालते हैं। इस प्रकार बननेवाली आकृति OBM एक समकोण त्रिभुज है। जिसकी समकोण बनाने वाली दो भुजाओं में से पहली भुजा OM की लम्बाई B बिन्दु का X-नियामक एवं दूसरी भुजा BM की लम्बाई B बिन्दु का y-नियामक के बराबर है। इस प्रकार OM = x इकाई तथा BM = y इकाई।

रेखाखंड AB की लम्बाई समकोण त्रिभुज OBM के कर्ण को व्यक्त कर रही है।

अब पाइथागोरस प्रमेय की सहायता से रेखाखंड AB की लम्बाई हम निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं:

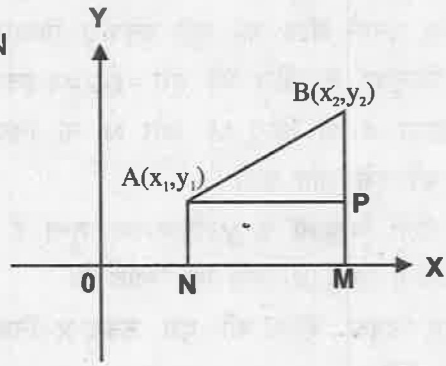
$$AB = \sqrt{OM^2 + BM^2} \quad = \sqrt{x^2 + y^2}$$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि जब दोनों बिन्दुओं में से एक मूल बिन्दु पर तथा दूसरा किसी पाद में हो तो उनके बीच की दूरी

$$= \sqrt{(\text{दूसरे बिन्दु का } x\text{-नियामक})^2 + (\text{दूसरे बिन्दु का } y\text{-नियामक})^2}$$

स्थिति-4: यहाँ बिन्दु A तथा बिन्दु B के नियामक क्रमशः (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) हैं।

इनको मिलानेवाला रेखाखंड AB है। अतः रेखाखंड AB की लम्बाई ज्ञात करने हेतु पहले B बिन्दु से X-अक्ष पर एक लंब BM डालते हैं। पुनः A बिन्दु से X-अक्ष एवं BM रेखा पर क्रमशः AN तथा AP लंब डाला। इस प्रकार बनने वाली आकृति APB एक समकोण त्रिभुज है।



चूँकि बिन्दु A के नियामक (x_1, y_1) हैं, अतः ON $= x_1$ तथा AN $= y_1$ हुआ।

साथ ही, बिन्दु B के नियामक (x_2, y_2) हैं

अतः OM $= x_2$ तथा BM $= y_2$ हुआ।

अब,रचना से AP= NM = OM - ON $= x_2 - x_1$

तथा PB = BM - PM

= BM-AN = $y_2 - y_1$

चूँकि APB एक समकोण त्रिभुज है इसलिए कर्ण, AB के लिए, $AB^2 = AP^2 + PB^2$

यानी $AB = \sqrt{AP^2 + PB^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

इस प्रकार दो बिन्दुओं के बीच की दूरी को ज्ञात करने हेतु हम उनके X-नियामकों के अन्तर के वर्ग में y-नियामकों के अन्तर का वर्ग जोड़कर उसका वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

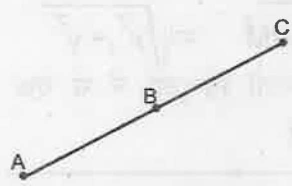
उदाहरण 1 : दो बिन्दु A(4,6) तथा B(5,8) के बीच की दूरी क्या होगी?

हलः हम जानते हैं कि दो बिन्दु A(4,6) तथा B(5,8) के बीच की दूरी,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-4)^2 + (8-6)^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

दूरी सूत्र की सहायता से तीन बिन्दुओं की समरेख होने की जाँच



माना कि A, B, एवं C तीन दिये गये बिन्दु हैं। ये तीनों बिन्दु समरेख होंगे यदि

$AB + BC = AC$ या $AC - AB = BC$ या $AC - BC = AB$

यानी AB, BC और AC में से किन्हीं दो का योग तीसरे के बराबर हो। यदि ऐसा नहीं हुआ तो तीनों बिन्दु समरेख नहीं होंगे और उन तीनों से होकर कोई सरल रेखा नहीं खींची जा सकती है।

उदाहरण 2 : पता लगाइए कि बिन्दु A(1,2), B(2,3) तथा C(3,4) समरेख हैं या नहीं।

$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(3-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$AB + BC = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = AC$

चूँकि AB + BC = AC , इसलिए तीनों बिन्दु समरेख हैं।

उदाहरण 3 : पता लगाइए कि बिन्दु (3,4), (8, -6) एवं (13,9) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं?

हल: माना कि (3, 4), (8, -6) एवं (13, 9) क्रमशः बिन्दु A, B और C के नियामक हैं।

तब $AB^2 = (3-8)^2 + \{4-(-6)\}^2 = (5)^2 + (10)^2 = 25 + 100 = 125$

$BC^2 = (8-13)^2 + (-6-9)^2 = (-5)^2 + (-15)^2 = 25 + 225 = 250$

$AC^2 = (3-13)^2 + (4-9)^2 = (-10)^2 + (-5)^2 = 100 + 25 = 125$

यहाँ, $AB^2 + AC^2 = BC^2$

अतः (3,4), (8, -6) एवं (13,9) समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

प्रश्नावली–18

1. मूल बिन्दु का नियामक क्या होगा ?
2. बिन्दु B (3, - 4) किस पाद में होगा ?
3. बिन्दु B (1, 2) एवं C (3, 5) को आलेख में दर्शाइए।
4. बिन्दुओं के निम्नलिखित जोड़ों के बीच की दूरियाँ क्या होगी?
   क. (2,5), एवं (3,1)
   ख. (-4,2), एवं (-3,3)
5. दो बिन्दु B (3,2) एवं C (x,7) के बीच की दूरी 5 मात्रक है तो X का मान क्या होगा?
6. क्या बिन्दु (1, 1), (-3, 5) एवं (3,-1) समरेख हैं?
7. Y अक्ष पर उस बिन्दु को ज्ञात करें जो बिन्दु (-5, 3), एवं (3,6) से समान दूरी पर हो।
8. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (-6,8), (9,13) एवं (4, 3) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।
9. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(x, y+z), (y, z+x)$ एवं $(z, x+y)$ समरेख हैं।
10. किसी समबाहु त्रिभुज के दो शीर्ष (0,3), एवं (4,3) हों तो तीसरा शीर्ष ज्ञात कीजिए।
11. a के किस मान के लिए (a, 2), (-5, 8) एवं (-2,4) समरेख होंगे?
12. पता कीजिए कि क्या बिन्दु (-2,4), (4,1) एवं (1,-4) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं?

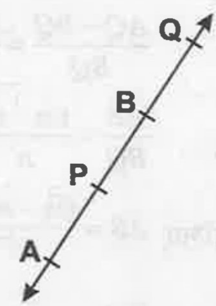
3.3 विभाजन सूत्र (SECTION FORMULA)

भूमिका

दैनिक जीवन की आवश्यकताओं की पूर्ति के क्रम में हम अक्सर वस्तुओं का विभाजन करते रहते हैं। इन विभाजनों का कुछ निहितार्थ भी होता है और विभाजन किसी न किसी अनुपात में ही होता है। यदि हमें एक रस्सी के टुकड़े को तीन बराबर भागों में बाँटना हो तो उस रस्सी पर दो जगहों पर इस अनुपात में निशान लगायेंगे कि होने वाले तीनों टुकड़ों की लम्बाइयाँ समान हों। उसी लम्बाई की रस्सी को तीन टुकड़ों में इस प्रकार बाँटना हो कि पहला टुकड़ा दूसरे टुकड़े का दोगुना एवं तीसरे का तीनगुना हो, तो इस बार रस्सी को टुकड़ों में बाँटने के लिए लगाये जाने वाले निशान कुछ अलग अनुपात में होंगे जो पहले के अनुपात से कुछ भिन्न होंगे। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि विभाजन सदैव एक अनुपात में ही होता है। गणितीय क्रियाकलापों को संपादित करने के क्रम में कई बार हमें सरल रेखाओं का भी विभाजन करना पड़ता है। आइए, सरल रेखाओं के विभाजन का अवलोकन किया जाए।

3.3.1 रेखाओं का अन्तर्विभाजन एवं बहिर्विभाजन बिन्दु

बगल के चित्र को ध्यान से देखिए। AB एक रेखाखंड है जिसके अंत बिन्दु A तथा B हैं रेखाखंड पर स्थित प्रत्येक बिन्दु इस रेखाखंड को एक निश्चित अनुपात में विभाजित करता है। जब रेखाखंड पर स्थित किसी बिन्दु P के द्वारा रेखाखंड का विभाजन किया जा रहा हो तो इस प्रकार का विभाजन रेखाखंड का अन्तर्विभाजन कहा जाता है।



बिन्दु P रेखाखंड AB को अन्तर्विभाजित कर रहा है अतः हम कह सकते हैं कि यह रेखाखंड को m:n के अनुपात में विभाजित कर रहा है।

यदि विभाजन का यह अनुपात अगर m:n हो तब $\frac{PA}{PB}=\frac{m}{n}$, या $PA=\frac{m}{n}PB$

चूँकि $\frac{PA}{PB}=\frac{m}{n}$, अत: $\frac{PB}{PA}=\frac{n}{m}$

या, $\frac{PB}{PA}+1=\frac{n}{m}+1$

या, $\frac{PB+PA}{PA}=\frac{n+m}{m}$

या, $\frac{AB}{PA}=\frac{n+m}{m}$, इसलिए, $\frac{PA}{AB}=\frac{m}{m+n}$, तब $PA=\frac{m}{m+n}AB$

इसी प्रकार $PB=\frac{n}{m+n}AB$

अब ऊपर के चित्र को ध्यान से देखिए। बिन्दु Q रेखाखंड AB पर स्थित न होकर बिन्दु के करीब रेखाखंड से बाहर स्थित है जो AB रेखाखंड को $\frac{AQ}{BQ}$ के अनुपात में बहिर्विभाजित करता है। यदि बिन्दु Q रेखाखंड AB को m:n अनुपात में बहिर्विभाजित करता है, तब $\frac{AQ}{BQ}=\frac{m}{n}$, या $\frac{AQ}{BQ}-1=\frac{m}{n}-1$

या, $\frac{AQ-BQ}{BQ}=\frac{(m-n)}{n}$

या, $\frac{AB}{BQ}=\frac{(m-n)}{n}$

इसलिए $AB=\frac{(m-n)}{n}BQ$

या, $BQ=\frac{n}{(m-n)}AB$

उसी प्रकार $AQ=\frac{m}{(m-n)}AB$

बहिर्विभाजिन बिन्दु B के निकट था यह बिन्दु A के निकट भी हो सकता है।

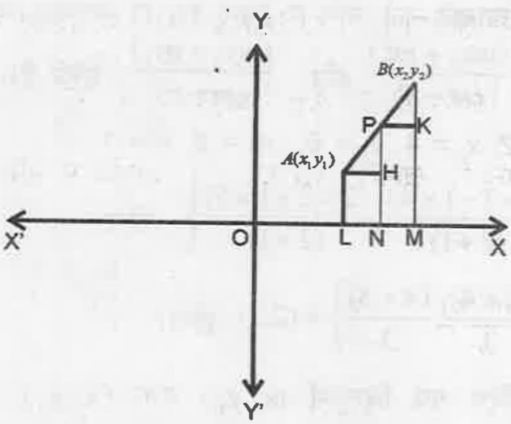
विभाजन सूत्र (Section Formula)

किसी बिन्दु द्वारा रेखा का विभाजन दो प्रकार से होता है: 1. अन्तर्विभाजन 2.बहिर्विभाजन यहाँ हम बारी-बारी से किसी रेखाखंड को अन्तर्विभाजित एवं बहिर्विभाजित करनेवाले बिन्दु

के नियामक ज्ञात करेंगे।

3.3.2 अन्तर्विभाजन सूत्र दो दिये गये बिन्दुओं (x_1,y_1) तथा (x_2,y_2) को मिलानेवाले रेखाखंड को m:n के अनुपात में अन्तर्विभाजित करनेवाले बिन्दु का नियामक ज्ञात करना है। माना कि 'O' मूल बिन्दु है तथा XOX' और YOY' क्रमशः x–अक्ष और y–अक्ष है तथा A एवं B दो दिये गये बिन्दु हैं, जिनके नियामक क्रमशः (x_1,y_1) तथा (x_2,y_2) हैं। बिन्दु P दोनों बिन्दुओं को मिलानेवाली रेखा AB को m:n के अनुपात में अन्तर्विभाजित कर रहा है। अब, हमें P बिन्दु का नियामक ज्ञात करना है।

माना कि P बिन्दु का नियामक (x, y) है। बिन्दु A, B और P से OX पर क्रमशः AL, BM और PN लंब डाला। फिर A से PN पर AH तथा P से BM पर PK लंब डाला।



चूँकि बिन्दु A, B और P के नियामक क्रमशः (x_1,y_1), (x_2,y_2) तथा (x, y) हैं अतः

$AH = LN = ON - OL = x - x_1$ तथा $PH = PN - HN = PN - AL = y - y_1$

$PK = NM = OM - ON = x_2 - x$ तथा $BK = BM - KM = BM - PN = y_2 - y$

अब, समरूप त्रिभुज AHP तथा त्रिभुज PKB से

$$\frac{AH}{PK} = \frac{PH}{BK} = \frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore \quad \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_2)} = \frac{m}{n}$$

या, $$nx - nx_1 = mx_2 - mx$$

या, $(m+n)x = mx_2 + nx_1$

या, $x = \frac{(mx_2 + nx_1)}{(m+n)}$

इसी प्रकार $y = \frac{(my_2 + ny_1)}{(m+n)}$

अतः P बिन्दु के नियामक क्रमशः $\frac{(mx_2 + nx_1)}{(m+n)}$ और $\frac{(my_2 + ny_1)}{(m+n)}$ हैं।

उदाहरण 1 : यदि दो दिये गये बिन्दुओं B(4,5) तथा A(1,2) को मिलानेवाली रेखाखंड AB को P बिन्दु 2:1 में अन्तर्विभाजित करता है तो P बिन्दु का नियामक ज्ञात करें।

हलः- हम जानते हैं कि AB रेखाखंड को यदि P बिन्दु m:n अनुपात में अन्तर्विभाजित करे तो P बिन्दु का नियामक $\frac{(mx_2 + nx_1)}{(m+n)}$ और $\frac{(my_2 + ny_1)}{(m+n)}$ होता है।

ऊपर के प्रश्न में $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 4$, $y_2 = 5$, $m = 2$, $n = 1$

तब P बिन्दु का नियामक $\left\{\frac{(2\times1+1\times4)}{(2+1)}, \frac{(2\times2+1\times5)}{(2+1)}\right\}$ होगा।

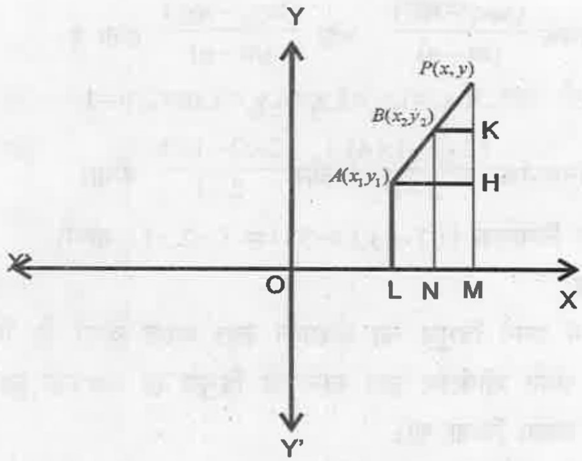
अतः P बिन्दु का नियामक $\left\{\frac{(2+4)}{3}, \frac{(4+5)}{3}\right\} = (2,3)$ होगा।

3.3.3 बहिर्विभाजनसूत्रः दो दिये गये बिन्दुओं (x_1,y_1) तथा (x_2,y_2) को मिलानेवाले रेखाखंड को m:n के अनुपात में बहिर्विभाजित करनेवाले बिन्दु का नियामक ज्ञात करना है।

माना कि 'O' मूल बिन्दु है तथा XOX' और YOY' क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष हैं तथा A एवं B दो दिये गये बिन्दु हैं, जिनके नियामक क्रमशः (x_1,y_1) तथा (x_2,y_2) हैं। बिन्दु P दोनों बिन्दुओं को मिलानेवाली रेखा AB को m:n के अनुपात में बहिर्विभाजित कर रहा है। अब हमें P बिन्दु का नियामक ज्ञात करना है।

माना कि P बिन्दु का नियामक (x,y) है। बिन्दु A, B और P से OX पर क्रमशः AL, BM और PN लंब डाला। फिर A से PN पर AH तथा B से PN पर BK लंब डाला।

चूँकि बिन्दु A, B और P के नियामक क्रमशः(x_1,y_1),(x_2,y_2) तथा (x,y)है,



अत:

AH = LM = OM - OL = $x - x_1$ तथा PH = PM-HM = PM - AL = $y - y_1$

BK = NM = OM - ON = $x - x_2$ तथा PK = PM-KM = PM - BN = $y - y_2$

अब, समरूप त्रिभुज AHP तथा त्रिभुज PKB से

$$\frac{AH}{BK}=\frac{PH}{PK}=\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$$

$\therefore$ $$\frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{m}{n}$$

या, $$mx-mx_2=nx-nx_1$$

या, $$(m-n)x=mx_2-nx_1$$

$\therefore$ $$x=\frac{(mx_2-nx_1)}{(m-n)}$$

इसी प्रकार $y=\dfrac{(my_2-ny_1)}{(m-n)}$

अत: P बिन्दु के नियामक $\dfrac{(mx_2-nx_1)}{(m-n)}$ और $\dfrac{(my_2-ny_1)}{(m-n)}$ हैं।

उदाहरण 2 : यदि दो दिये गये बिन्दुओं A(1,2) तथा B(4,5) को मिलानेवाला रेखाखंड AB को P बिन्दु 2:1 में बहिर्विभाजित करता है तो P बिन्दु का नियामक ज्ञात करें।

हल:- हम जानते हैं कि AB रेखाखंड को यदि P बिन्दु m:n अनुपात में बहिर्विभाजित

करें तो P बिन्दु का नियामक $\frac{(mx_2 - nx_1)}{(m-n)}$ और $\frac{(my_2 - ny_1)}{(m-n)}$ होता है।

ऊपर के प्रश्न में $x_1=1, y_1=2, x_2=4, y_2=5, m=2, n=1$

तब Pबिन्दु का नियामक $\frac{(2\times1-1\times4)}{2-1}$ और $\frac{2\times2-1\times5}{2-1}$ होगा।

अतः P बिन्दु का नियामक {(2-4),(4-5)}= (-2,-1) होगा।

3.4 त्रिभुज का क्षेत्रफल

पिछली कक्षाओं में हमने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना जाना है। किसी त्रिभुज का आधार और उसका संगत शीर्षलंब ज्ञात रहने पर त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमने निम्न सूत्र का प्रयोग किया था:

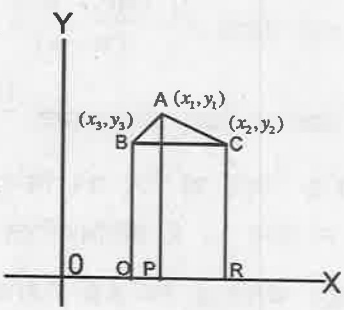
त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

उसी प्रकार जब किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं की माप दी हो तो हीरो के सूत्र की सहायता से हम त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं। हीरो सूत्र निम्न प्रकार है:

क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, जहाँ s = त्रिभुज की अर्द्धपरिमिति एवं a,b तथा c त्रिभुज की तीन भुजाएँ हैं।

अगर हमें त्रिभुज के तीनों शीर्षों के नियामक दिये गये हो तो हम दूरी-सूत्र की सहायता से त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई ज्ञात कर हीरो सूत्र की सहायता से त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं। जब भुजाओं की लम्बाई अपरिमेय संख्या के रूप में प्राप्त हो जाये तो यह विधि जटिल हो सकती है। आइए, त्रिभुज की तीनों भुजाओं के शीर्षों का नियामक ज्ञात रहने पर त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने की सरल विधि के बारे में जानें।

माना कि ABC एक त्रिभुज है, जिसके शीर्ष A का नियामक (x_1,y_1), शीर्ष B का नियामक (x_2,y_2) तथा शीर्ष C का नियामक (x_3,y_3) हैं। बिन्दु A, B तथा C से x-अक्ष पर क्रमशः AP, BQ तथा CR लंब डाला। बगल की आकृति को देखिए। इसमें ABQP, APRC तथा BQRC समलंब हैं। आकृति से स्पष्ट है कि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = समलंब ABQP + समलंब APRC - समलंब BQRC



$\because$ समलंब का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ X समान्तर भुजाओं का योग X उनके बीच की दूरी

अतः त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल= $\frac{1}{2}$(BQ+AP)QP + $\frac{1}{2}$ (AP+CR)PR + $\frac{1}{2}$(BQ+CR)QR

$$= \frac{1}{2}(y_2+y_1)(x_1-x_2) + \frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1) + \frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_3-x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$$

अतः त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल व्यंजक $\frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$ का संख्यात्मक मान है।

उदाहरण 3 : उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (1,-1),(-4,6) और (-3,-5) हैं।

हलः शीर्ष A (1, -1), B (-4,6) और C (-3,-5) वाले त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\{1(6+5)+(-4)(-5+1)+(-3)(-1-6)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{11+16+21\} = 24.$$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल 24 वर्ग मात्रक है।

उदाहरण 4 : k का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिन्दु A (2, 3),B (4,k)और C(6,-3) समरेख हैं।

हलः चूँकि तीनों बिन्दु समरेख हैं, इसलिए इससे बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा।

अर्थात् $\frac{1}{2}\{2(k+3)+4(-3-3)+6(3-k)\}=0$

अर्थात् $\frac{1}{2}\{-4k\}=0$

या, $k=0$

अतः k का वांछित मान 0 है।

उदाहरण 5 : सिद्ध कीजिए कि (a, 0), (0,b) और (1,1) एक ही रेखा पर होंगे, यदि

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$$

हलः मान लिया कि बिन्दु A का नियामक (a,0), बिन्दु B का नियामक (0,b) और बिन्दु C का नियामक (1,1) है।

अगर ये तीनों बिन्दु एक त्रिभुज के शीर्ष हों तो तब त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$=\frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$$

$$\frac{1}{2}\{a(b-1)+0(1-0)+1(0-b)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{ab-a-b\}$$

बिन्दु समरेख होंगे यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल = 0 होगा।

इसलिए, $\frac{1}{2}\{ab-a-b\}=0$

या, $ab-a-b=0$

या, $a+b=ab$

या, $\frac{(a+b)}{ab}=1$

इसलिए, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$, सिद्ध हुआ।

प्रश्नावली-19

1. यदि A=(x,y), B=(a,b) और बिन्दु P रेखा AB पर इस प्रकार है कि AP > AB और AP:BP = m:n तो
   (a) P का X-नियामक = ...
   (b) P का y-नियामक =.....................
2. यदि A = (x,y), B = (a,b)और बिन्दु P रेखा AB को m:1 के अनुपात में अन्तर्विभाजित करता है तो
   (a) P का x-नियामक = ...
   (b) P का y-नियामक =......................
3. उस बिन्दु के नियामक निकालें जो बिन्दु (2,3) तथा (3,-1) को मिलानेवाले रेखाखंड को

(a) 2:1 के अनुपात में अन्तर्विभाजित करता है।

(b) 2:1 के अनुपात में बहिर्विभाजित करता है।

4. यदि A = (0,2), B = (3,0) और बिन्दु P रेखाखंड AB पर इस प्रकार है कि

(a) AP/BP = 2/3 तो P के नियामक निकालें।

(b) AP/BP = 5/2 तो P के नियामक निकालें।

5. बिन्दु (1,2) तथा (11,9) को मिलानेवाले रेखाखंड के समद्विभाजक बिन्दु के नियामक निकालें।

6. बिन्दु (2,1) तथा (-1,2) को मिलाने वाले रेखाखंड को 2:3 के अनुपात में अन्तर्विभाजित एवं बहिर्विभाजित करने वाले बिन्दुओं के बीच की दूरी निकालें।

7. बिन्दुओं (-3,10) तथा (6,-8) को मिलाने वाले रेखाखंड को बिन्दु (-1,6) किस अनुपात में विभाजित करता है?

8. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं $A(1,-5)$ तथा $B(-4,5)$ को मिलाने वाला रेखाखंड x-अक्ष से विभाजित होता है। इस विभाजन बिन्दु का निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

9. किसी त्रिभुज के दो शीर्ष (-3,1) तथा (0,-2) और उसके केन्द्रक मूल बिन्दु हैं तो तृतीय शीर्ष ज्ञात करें।

10. बिन्दु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ AB एक वृत्त का व्यास है जिसका केन्द्र (2,-3) है तथा B का निर्देशांक (1,4) है।

11. बिन्दु (-2,2) तथा (2,8) को मिलानेवाले रेखाखंड को चार बराबर भागों में विभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

12. त्रिभुज ABC के शीर्ष क्रमशः (-2,1), (5,4) और (2,-3) हैं। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

13. सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल a से स्वतंत्र होगा यदि उसके शीर्ष $(a,a-2),(a+2,a+2)$ और $(a+3,a)$ हों।

14. सिद्ध कीजिए कि $(4,-5),(1,1)$ तथा $(-2,7)$ समरेख हैं।

15. यदि बिन्दु $(1,-3)$ और $(-4,2)$ को मिलाने वाली रेखा पर बिन्दु (x,y) स्थित हो तो सिद्ध कीजिए कि $x+y+2=0$